『化学のための数学入門』――問題の解答

第 1 章　章末問題の解答

【問 1】 $\log x = X$ と置くと，与式(問題の式)は

$$2X^2 - 3X + 1 = 0$$

となる．
因数分解すると

$$(2X-1)(X-1) = 0$$

$$\therefore X = \frac{1}{2}, 1$$

という解を得る．

$$X = \frac{1}{2} \Rightarrow \log x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

$$X = 1 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10$$

x は整数であるので，求める x の値は $x = 10$ である．

解　$x = 10$

【問 2】 $z = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ より
絶対値は $|z| = \sqrt{(2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$
偏角は $z = 4(\cos\theta + i\sin\theta) = 2 - 2\sqrt{3}\,i$
となるので，

$$\cos\theta = \frac{1}{2}, \quad \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \theta = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2\cdots)$$

解　絶対値 $= 4$

偏角 $= -\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2\cdots)$

【問 3】 倍角公式は　$\sin 2A = 2\sin A\cos A$

$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$

である．

ここで $A = \frac{\pi}{6}$ と考えると，まず

$$\cos\frac{\pi}{3} = 2\cos^2\frac{\pi}{6} - 1 = 2 \times \frac{3}{4} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

となる．また，$\sin^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{6} = 1$ より，

$$\sin^2\frac{\pi}{6} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$\sin\frac{\pi}{6} > 0$ より

$$\sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin\frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

解　$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

【問 4】　まず，$\sin^2 A$ について証明する．

オイラーの公式より

$$e^{iA} = \cos A + i\sin A$$
$$e^{-iA} = \cos A - i\sin A$$

$$\therefore \sin A = \frac{1}{2i}(e^{iA} - e^{-iA})$$

$$\sin^2 A = -\frac{1}{4}(e^{iA} - e^{-iA})^2$$

$$= -\frac{1}{4}(e^{2iA} + e^{-2iA} - 2)$$

$$= -\frac{1}{4}\{(\cos 2A + i\sin 2A) + (\cos 2A - i\sin 2A) - 2\}$$

$$= -\frac{1}{4}(2\cos 2A - 2)$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos 2A - 1)$$

となり，証明された．

$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$ より

$$\cos^2 A = 1 - \{-\frac{1}{2}(\cos 2A - 1)\}$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 2A + 1)$$

となり，証明された．

〔$\cos A = \frac{1}{2}(e^{iA} + e^{-iA})$を用いても証明できる〕

【問 5】 $N = N_0 \exp(-\lambda x)$ に $N = \frac{N_0}{2}$ を代入．

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \exp(-\lambda x)$$

$$\therefore \frac{1}{2} = \exp(-\lambda x)$$

両辺の対数をとると（自然対数をとる）

$$\ln \frac{1}{2} = -\lambda x$$

$$-\ln 2 = -\lambda x$$

$$\therefore x = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

解　$x = \frac{\ln 2}{\lambda}$

第 2 章　章末問題の解答

【問 1】 (1) $y = (1 + \cos x)\sin x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

$$\begin{aligned} y' &= (-\sin x)\sin x + (1 + \cos x)\cos x \\ &= -\sin^2 x + \cos x + \cos^2 x \\ &= -(1 - \cos^2 x) + \cos x + \cos^2 x \end{aligned}$$

$$= 2\cos^2 x + \cos x - 1$$
$$= (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$$

$y' = 0$ となるのは $\cos x = \dfrac{1}{2}, -1$ のときである．

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ であるから，$x = \dfrac{\pi}{3}$，π，$\dfrac{5\pi}{3}$ のとき $y' = 0$ となる．

以上より増減表を書くと，

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\dfrac{5\pi}{3}$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0

解　極大値　$x = \dfrac{\pi}{3}$ のとき $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

極小値　$x = \dfrac{5\pi}{3}$ のとき $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

［補足］$y'' = 4\cos x(-\sin x) - \sin x$
$$= -\sin x(4\cos x + 1)$$

$x = \pi$ のとき $y'' = 0$ である．$x = \pi$ は変曲点であることがわかる．

(2) $y = xe^{-x}$

$$y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}$$

$x = 1$ のとき $y' = 0$ となる．

増減表を書くと

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$

解　極大値　$x = 1$ のとき $y = e^{-1} = 1/e$

極小値　なし

【問 2】 p.48 の対数のマクローリン展開の式

$$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

に $x = 0$ を代入．

$$f(0) = \ln 1 = 0$$

となり，題意は証明された．

【問 3】 (1) 倍角公式より，$\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(\cos 2x + 1)$ となるので，これを積分すると，

$$\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2} + C$$

(2) 倍角公式と積分の公式を使うと，

$$\cos^2 x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)\sin 3x$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2x \sin 3x + \frac{1}{2}\sin 3x$$

$$= \frac{1}{4}\{\sin 5x - \sin(-x)\} + \frac{1}{2}\sin 3x$$

$$= \frac{1}{4}\sin 5x + \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{2}\sin 3x$$

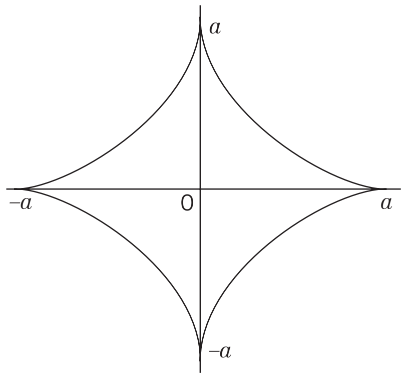
となるので，これを積分すると

$$-\frac{\cos 5x}{20} - \frac{\cos x}{4} - \frac{\cos 3x}{6} + C$$

(3) $t = \ln x$ と置いて置換積分をすれば，

$$\ln(\ln x) + C$$

【問 4】 アステロイドは右の図に示されるような図形である．



まず，微分・積分を行いやすくするため，

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

と置く（このように置くのも一つのパターンであり，覚えておくとよい）．

まず，曲線の長さを求める.
第一象限の長さの 4 倍が全体の長さとなるので,

$(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2})$ を考えればよい.

p.75 の式を用いて,

$$
\begin{aligned}
L &= 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)}\,\mathrm{d}t \\
&= 4\int_0^{\pi/2}3a\cos t\sin t\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= 12a\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t\,\mathrm{d}t \\
&= 12a\left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{\pi/2} = 6a
\end{aligned}
$$

例 2.19 にならって面積を求める.

$\mathrm{d}x = -3a\cos^2 t\sin t\,\mathrm{d}t$ より,

$$
\begin{aligned}
S &= 4\int_0^a y\,\mathrm{d}x = 4\int_{\pi/2}^0 a\sin^3 t(-3a\cos^2 t\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= 12a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\sin^4 t\,\mathrm{d}t = 12a^2\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 t)\sin^4 t\,\mathrm{d}t \\
&= 12a^2\int_0^{\pi/2}(\sin^4 t - \sin^6 t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

p.67 の例題 2.17 を用いて

$$
S = 12a^2\left(\frac{3}{2\cdot 4} - \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}a^2
$$

解　$L = 6a$

$S = \dfrac{3}{8}\pi a^2$

【問 5】　p.73 の例題 2.21 のラグビーボールにおいて，$a = b = r$ の場合に相当.

$$
V = \frac{4}{3}\pi r^3
$$

第 3 章　章末問題の解答

【問 1】 加速度の式に加速度の微分表現を代入して，

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - kv^2$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{g - kv^2} = \mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{k\left(\frac{g}{k} - v^2\right)} = \mathrm{d}t$$

を得る．ここで，左辺の分数を分解する．

$$\frac{\mathrm{d}v}{k\left(\frac{g}{k} - v^2\right)} = \frac{\mathrm{d}v}{k\left\{\left(\sqrt{\frac{g}{k}}\right)^2 - v^2\right\}} = \frac{\mathrm{d}v}{k\left(\sqrt{\frac{g}{k}} - v\right)\left(\sqrt{\frac{g}{k}} + v\right)}$$

$$= \frac{\mathrm{d}v}{2\sqrt{kg}}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{g}{k}} - v} + \frac{1}{\sqrt{\frac{g}{k}} + v}\right) = \frac{\mathrm{d}v}{2\sqrt{kg}}\left(\frac{1}{v + \sqrt{\frac{g}{k}}} - \frac{1}{v - \sqrt{\frac{g}{k}}}\right)$$

この分解した式を用いて微分方程式を解く．

$$\int_0^v \frac{1}{2\sqrt{kg}}\left(\frac{1}{v + \sqrt{\frac{g}{k}}} - \frac{1}{v - \sqrt{\frac{g}{k}}}\right)\mathrm{d}v = \int_0^t \mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{2\sqrt{kg}}\ln\left|\frac{v + \sqrt{\frac{g}{k}}}{v - \sqrt{\frac{g}{k}}}\right| = t$$

$$\left|\frac{v + \sqrt{\frac{g}{k}}}{v - \sqrt{\frac{g}{k}}}\right| = e^{2\sqrt{kg}\,t}$$

となる．ここで，落下していくためには，$g - kv^2 > 0$ が成り立たなければならない．

よって，$\sqrt{\frac{g}{k}} > v$ となるから，上の式は，

$$v + \sqrt{\frac{g}{k}} = \left(\sqrt{\frac{g}{k}} - v\right)e^{2\sqrt{kg}\,t}$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{g}{k}}\,\frac{e^{2\sqrt{kg}\,t} - 1}{e^{2\sqrt{kg}\,t} + 1}$$

となる．

【問 2】（1）これは同次形微分方程式の問題である．

$y = ux$ と置くと，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u$$

となり，これを問題の式に代入する．

$$a\left(x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u\right) = b - au$$

$$ax\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = b - 2au$$

$$\frac{1}{b - 2au}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{ax}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{b - 2au} = a\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{b - 2au} = a\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$-\frac{1}{2a}\ln(b - 2au) = \frac{1}{a}\ln x + c \qquad (c\text{；積分定数})$$

$$-\ln(b - 2au) = 2\ln x + 2ac$$

$$\frac{1}{b - 2au} = Cx^2 \qquad (C = e^{2ac}\text{ とした})$$

$$\frac{x}{bx - 2ay} = Cx^2$$

$$y = \frac{1}{2a}\left(bx - \frac{1}{cx}\right)$$

となる．

（2）簡単な変数分離型微分方程式である．

$$3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -4x^2y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{4}{3}x^2\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{4}{3}\int x^2\mathrm{d}x$$

$$\ln y = -\frac{4}{9}x^3 + c \qquad (c\text{；積分定数})$$

$$\therefore y = Ce^{-\frac{4}{9}x^2} \qquad (\text{積分定数を } C = e^c \text{ と置き直した})$$

(3) 置換積分を用いて解く例である．

$\sqrt{x+9} = t$ と置く．$x = t^2 - 9$, $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$ なので，問題の式は，

$$\mathrm{d}y = \frac{t^2-9}{t+3}\cdot 2t\mathrm{d}t = 2t(t-3)\,\mathrm{d}t$$

となる．これを積分すると，

$$\int y\mathrm{d}y = \int 2t(t-3)\,\mathrm{d}t$$

$$y = \frac{2}{3}t^3 - 3t^2 + c$$

$$= \frac{2}{3}(x+9)^{\frac{3}{2}} - 3(x+9) + c \qquad (c\text{；積分定数})$$

【問３】 $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}t^k = a_0 + \frac{a_1}{1!}t + \frac{a_2}{2!}t^2 + \cdots$を微分すると，

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}kt^{k-1} = a_1 + \frac{a_2}{1!}t + \frac{a_3}{2!}t^2 + \cdots$となり，もう一度微分すると，

$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}k(k-1)t^{k-2} = a_2 + \frac{a_3}{1!}t + \frac{a_4}{2!}t^2 + \cdots$となる．

（ここで項別に微分できることは断らなかったが，べき級数とよばれるこのかたちの無限和の場合は，収束している限り大丈夫である．気になる読者は，「一様収束」ということを勉強してほしい．）

これらの級数の t^n の係数は，それぞれ，$\frac{a_n}{n!}$，$\frac{a_{n+1}}{n!}$，$\frac{a_{n+2}}{n!}$である．

したがって，これらの級数を微分方程式に代入して t^n の係数を見

れば，$\dfrac{a_{n+2}}{n!} = 5\dfrac{a_{n+1}}{n!} - 6\dfrac{a_n}{n!}$ となるので，$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ がでる．

$t = 0$ を代入すれば，$x(0) = a_0$，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(0) = a_1$ となるので，初期条件より $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ がでる．

【問 4】 t^n の項の係数を比較することによって示す．

$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}F$ の t^n の項の係数 A_n は，

$$A_n = \frac{(a, n+2)(b, n+2)}{(c, n+2)(1, n+2)}(n+2)(n+1)$$

である．したがって，$t(t-1) = t^2 - t$ より，$t(1-t)\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2t}F$ の t^n の項の係数は，

$$A_{n-1} - A_{n-2} =$$
$$\frac{(a, n+1)(b, n+1)}{(c, n+1)(1, n+1)}(n+1)n - \frac{(a, n)(b, n)}{(c, n)(1, n)}n(n-1)$$

である．

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F$ の t^n の項の係数 B_n は，$B_n = \dfrac{(a, n+1)(b, n+1)}{(c, n+1)(1, n+1)}(n+1)$ となる．

したがって，$\{c-(a+b+1)t\}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F$ の t^n の項の係数は，

$$cB_n - (a+b+1)B_{n-1}$$
$$= c\frac{(a, n+1)(b, n+1)}{(c, n+1)(1, n+1)}(n+1) - (a+b+1)\frac{(a, n)(b, n)}{(c, n)(1, n)}n$$

である．

したがって，

$$t(1-t)\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2} + \{c-(a+b+1)t\}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} - abF$$

の t^n の項の係数は，

$$\frac{(a,n+1)(b,n+1)}{(c,n+1)(1,n+1)}(n+1)n-\frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)(1,n)}n(n-1)$$
$$+c\frac{(a,n+1)(b,n+1)}{(c,n+1)(1,n+1)}(n+1)$$
$$-(a+b+1)\frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)(1,n)}n-ab\frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)(1,n)}$$
$$=\frac{(a,n+1)(b,n+1)}{(c,n+1)(1,n+1)}(n+1)(n+c)$$
$$-\frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)(1,n)}\{n(n-1)+(a+b+1)+ab\}$$
$$=\frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)(1,n)}(a+n)(b+n)$$
$$-\frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)(1,n)}\{n(n-1)+(a+b+1)+ab\}$$
$$=\frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)(1,n)}\{(a+n)(b+n)-n(n-1)-(a+b+1)-ab\}$$

となる．二つ目から三つ目の変形で$(a,n+1)=(a,n)(a+n)$などの式を使った．
最後の式の{ }内が0になることが，計算すればわかる．
　したがって

$$t(1-t)\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2}+\{c-(a+b+1)t\}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}-abF=0$$

が示せた．

【問 5】 まず，$u(t)=(t^2-1)^n$と置く．$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)=n(t^2-1)^{n-1}\times 2t$である．
そこで両辺にt^2-1をかけると，$(t^2-1)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)=2nt(t^2-1)^n$
$=2ntu(t)$となる．これを$n+1$回微分する．このとき第2章3.4項で学んだ「ライプニッツ(Leibniz)の定理」を使う．
左辺は，

$$(t^2-1)\frac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}t^{n+2}}u(t)+(n+1)2t\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}}u(t)+\frac{(n+1)n}{2}\cdot 2\cdot\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}u(t)$$

となり，

右辺は，$2nt\dfrac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}}u(t)\ +\ 2n(n+1)\dfrac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}t^{n}}u(t)$となる．

左辺から右辺をひくと，

$$(t^2-1)\frac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}t^{n+2}}u(t)+2t\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}}u(t)-n(n+1)\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}t^{n}}u(t)\ =\ 0$$

となる．これは，

$$(t^2-1)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\{\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}u(t)\}+2t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}u(t)\}-n(n+1)\{\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}u(t)\}=0$$

となり，

$P_n(t)\ =\ \dfrac{1}{2^n\cdot n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^2-1)\ =\ \dfrac{1}{2^n\cdot n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}u(t)$であることから，

両辺を$\dfrac{1}{2^n\cdot n!}$倍すれば，$x=P_n(t)$が，

$(t^2-1)\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2t\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-n(n+1)x\ =\ 0$ を満たすことが示せた．

これは少々技巧的な解法である．
そこで少々計算力は必要だが，素直（？）な別解を書く．
二項展開より，

$(t^2-1)^n\ =\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k(t^2)^k(-1)^{n-k}\ =\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}t^{2k}$ である．

最後の変形で 2 項係数の記号を変えた．この式を n 回微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^2-1)^n\ &=\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(2k)(2k-1)\ \cdots\ (2k-n+1)t^{2k-n}\\ &=\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{(2k)!}{(2k-n)!}t^{2k-n}\end{aligned}$$

となる．
さらに微分すれば，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^2-1)^n\ =\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{(2k)!}{(2k-n-1)!}t^{2k-n-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^2-1)^n\ =\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{(2k)!}{(2k-n-2)!}t^{2k-n-2}$$

となる．したがって，

$$(t^2-1)\frac{d^2}{dt^2}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{(2k)!}{(2k-n-2)!}(t^2-1)t^{2k-n-2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{(2k)!}{(2k-n-2)!}t^{2k-n}$$

$$-\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{(2k)!}{(2k-n-2)!}t^{2k-n-2}$$

$$2t\frac{d}{dt}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n}2(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{(2k)!}{(2k-n-1)!}t^{2k-n}$$

となる．これらの二つの式の和，

$$(t^2-1)\frac{d^2}{dt^2}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n + 2t\frac{d}{dt}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$$

の t^i の係数を計算する．$\sum$ 記号が三つでてくるが，t^i にあたる項は，一つ目の $\sum$ では $2k-n=i$，すなわち $k=\dfrac{n+i}{2}$ の項に，二つ目の $\sum$ では $2k-n-2=i$，すなわち $k=\dfrac{n+i}{2}+1$ の項に，三つ目の $\sum$ では $2k-n=i$，すなわち $k=\dfrac{n+i}{2}$ の項になる．

それらを計算すると，

$$(-1)^{n-\frac{n+i}{2}}\binom{n}{\frac{n+i}{2}}\frac{(n+i)!}{(i-2)!} - (-1)^{n-\frac{n+i}{2}-1}\binom{n}{\frac{n+i}{2}+1}\frac{(n+i+2)!}{i!}$$

$$+ 2(-1)^{n-\frac{n+i}{2}}\binom{n}{\frac{n+i}{2}}\frac{(n+i)!}{(i-1)!}$$

となる．これをさらに計算すると，

$$(-1)^{\frac{n-i}{2}}\{\binom{n}{\frac{n+i}{2}}\frac{(n+i)!}{(i-2)!} + \binom{n}{\frac{n+i}{2}+1}\frac{(n+i+2)!}{i!}$$

$$+ 2\binom{n}{\frac{n+i}{2}}\frac{(n+i)!}{(i-1)!}\}$$

$$= (-1)^{\frac{n-i}{2}}\left[\binom{n}{\frac{n+i}{2}}\left\{\frac{(n+i)!}{(i-2)!} + 2\frac{(n+i)!}{(i-1)!}\right\}\right.$$

$$\left. + \binom{n}{\frac{n+i}{2}+1}\frac{(n+i+2)!}{i!}\right]$$

$$= (-1)^{\frac{n-i}{2}}\left\{\binom{n}{\frac{n+i}{2}}\frac{(n+i)!}{(i-1)!}(i-1+2) + \binom{n}{\frac{n+i}{2}+1}\frac{(n+i+2)!}{i!}\right\}$$

$$= (-1)^{\frac{n-i}{2}}\left\{\frac{n!}{(\frac{n+i}{2})!(\frac{n-i}{2})!}\frac{(n+i)!}{(i-1)!}(i+1)\right.$$

$$\left. + \frac{n!}{(\frac{n+i}{2}+1)!(\frac{n-i}{2}-1)!}\frac{(n+i+2)!}{i!}\right\}$$

$$= (-1)^{\frac{n-i}{2}}\frac{n!}{(\frac{n+i}{2}+1)!(\frac{n-i}{2})!}\frac{(n+i)!}{i!}\left\{(\frac{n+i}{2}+1)i(i+1)\right.$$

$$\left. + (\frac{n-i}{2})(n+i+2)(n+i+1)\right\}$$

$$= (-1)^{\frac{n-i}{2}}\frac{n!}{(\frac{n+i}{2}+1)!(\frac{n-i}{2})!}\frac{(n+i)!}{i!}\frac{n+i+2}{2}\left\{i(i+1)\right.$$

$$\left. +(n-i)(n+i+1)\right\}$$

$$= (-1)^{\frac{n-i}{2}}\frac{n!}{(\frac{n+i}{2}+1)!(\frac{n-i}{2})!}\frac{(n+i)!}{i!}(\frac{n+i}{2}+1)\left\{i(i+1)\right.$$

$$\left. + n^2 + n - i(i+1)\right\}$$

$$= (-1)^{\frac{n-i}{2}}\frac{n!}{(\frac{n+i}{2})!(\frac{n-i}{2})!}\frac{(n+i)!}{i!}(n^2+n)$$

$$= (-1)^{\frac{n-i}{2}}\binom{n}{\frac{n+i}{2}}\frac{(n+i)!}{i!}n(n+1)$$

となる．

一方，$\dfrac{d^n}{dt^n}(t^2-1)$ の t^i の係数は，$2k-n=i$，すなわち $k=\dfrac{n+i}{2}$ の項なので，

$$(-1)^{n-k}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\frac{(2k)!}{(2k-n)!}$$

$$=\ (-1)^{n-\frac{n+i}{2}}\begin{pmatrix} n \\ \dfrac{n+i}{2} \end{pmatrix}\frac{(n+i)!}{i!}=(-1)^{\frac{n-i}{2}}\begin{pmatrix} n \\ \dfrac{n+i}{2} \end{pmatrix}\frac{(n+i)!}{i!}$$

となる．これを $n(n+1)$ 倍したものが先ほど計算した係数なので，

$$(t^2-1)\frac{d^2}{dt^2}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n+2t\frac{d}{dt}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n-n(n+1)\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n=0$$

を満たすことがわかる．

したがって $\dfrac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$ を $\dfrac{1}{2^n\cdot n!}$ 倍した $P_n(t)=\dfrac{1}{2^n\cdot n!}\dfrac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$ が $(t^2-1)\dfrac{d^2x}{dt^2}+2t\dfrac{dx}{dt}-n(n+1)x=0$ の解であることがわかる．

［コメント］この微分方程式は，問 4 の微分方程式で，$a=-n$，$b=n+1$, $c=0$ としたものである．

第 4 章　文中問題の解答

【問題 4.1】 (1) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$，(2) $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$，(3) $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$，(4) $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

【問題 4.3】 (1) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，(2) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$，(4) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -15 & -8 \end{pmatrix}$

【問題 4.4】 (1) (8)，(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，(3) できない，(4) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

【問題 4.5】(1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7s \\ 4s \\ -5s \end{pmatrix}$, (3) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s \\ \frac{15}{14} - \frac{13}{14}s \\ \frac{9}{14} - \frac{5}{14}s \\ s \end{pmatrix}$

(4) 解なし

分数の答えが多くなってしまった．受験数学ではあまり複雑な分数はでてこないが，現実には結構でてくるかもしれない．(2) は分母をはらってパラメータを置き直してある．もちろん，基本変形の仕方によって答えの表示が変わるので，これと異なっていても正解の可能性はある．心配なら方程式に代入してみれば正しいかどうかはわかる．もっとも代入して正しいからといって，これがすべての解かどうかはわからない．(2) で解として $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ しかでてこなくても．代入すれば合っている．しかし，これは $s = 1$ という特別なものである．s はいろいろな値を取るので，全部の解を見つけたことにはならない．

【問題 4.6】(1) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (3) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

この問題の解説は不要だろう．問題の行列にかけてみればわかる．

【問題 4.7】(1) -1,　(2) -1,　(3) -2,　(4) $ad - bc$,　(5) 0

【問題 4.8】(1) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (3) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(4) $\dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

当然であるが，(1)，(2)，(3) は問題 4.6 と答えが同じである．

【問題 4.9】(1) 固有方程式は，

$$\left|\begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} t-1 & 3 & -2 \\ 0 & t-2 & 0 \\ 0 & 1 & t-3 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \{(t-1)(t-2)(t-3) + 3\cdot 0\cdot 0 + (-2)\cdot 1\cdot 0\}$$

$$- \{(-2)\cdot(t-2)\cdot 0 + 3\cdot 0\cdot(t-3) + (t-1)\cdot 1\cdot 0\}$$

$$= (t-1)(t-2)(t-3)$$

となる．したがって，

固有値　　$1,\quad 2,\quad 3$

固有ベクトル　$\begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ u \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ここでは $s = t = u = 1$ とした固有ベクトルを使って P をつくったが，s, t, u は 0 でなければ何でもよい．

(2) 固有多項式は，

$$\left|\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & -1 \\ 0 & t & -1 & 0 \\ 0 & -1 & t & 0 \\ -1 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}\right|$$

$$= t\left|\begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ -1 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}\right| - (-1)\left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ t & -1 & 0 \\ -1 & t & 0 \end{pmatrix}\right| = t\cdot t(t^2-1) + (-t^2+1)$$

$$= t^4 - 2t^2 + 1 = (t^2-1)^2 = \{(t+1)(t-1)\}^2 = (t+1)^2(t-1)^2$$

となる．ここでは，行列式の計算は 4.6 節で説明した方法を用いた．はきだして求める方法などいろいろあるので，各自で工夫してほしい．

固有値　　$-1,\qquad 1$

固有ベクトル　$\begin{pmatrix} s \\ t \\ -t \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ v \\ u \end{pmatrix} = u\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ここでは，それぞれ $s = 1, t = 0$，$s = 0, t = 1$，$u = 1, v = 0$，$u = 0, v = 1$ とした固有ベクトルを使って P をつくったが，s，t，u，v は四つのベクトルが一次独立ならば何でもよい．固有値が異なれば一次独立なので，同じ固有値に付随する固有ベクトルどうしが一独立になるようにすれば十分である．

第 4 章　章末問題の解答

【問 1】 1．V の元 $(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$，$(b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots)$ は，それぞれ漸化式

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n,\quad b_{n+2} = 5b_{n+1} - 6b_n$$

を満たす．これらをたし合わせれば，

$$a_{n+2} + b_{n+2} = 5(a_{n+1} + b_{n+1}) - 6\,(a_n + b_n)$$

となる．この式は，

$$\begin{aligned}&(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) + (b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots)\\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n, \cdots)\end{aligned}$$

が，V の元となる条件の漸化式を満たしていることがわかる．

さらにスカラー倍 $\alpha(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \cdots, \alpha a_n, \cdots)$ が漸化式を満たしていることは，$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ を α 倍すれば，$\alpha a_{n+2} = 5\alpha a_{n+1} - 6\alpha a_n$ となることからわかる．

あとは八つの性質を満たすことを確かめればよいわけだが，(1)～(6) は計算から明らかであり，(7) は $(0, 0, \cdots, 0, \cdots)$ が V の元であることは漸化式を見れば明らかであり，(8) は $\alpha\ (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \cdots, \alpha a_n, \cdots)$ で $\alpha = -1$ とすればよい．

2．線形写像の定義を確かめればよい．すなわち，

$$\begin{aligned}&\partial\{(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) + (b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots)\}\\ &= \partial\{(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)\} + \partial\{(b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots)\} \quad \text{と}\\ &\partial\{\alpha\,(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)\} = \alpha\partial\{(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)\}\end{aligned}$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
\text{前者の左辺} &= \partial\{(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n, \cdots)\} \\
&= (a_2 + b_2, a_3 + b_3, \cdots, a_{n+1} + b_{n+1}, \cdots) \quad \text{であり，} \\
\text{右辺} &= (a_2, a_3, \cdots, a_{n+1}, \cdots) + (b_2, b_3, \cdots, b_{n+1}, \cdots)
\end{aligned}$$

である．両者が等しいことは加法の定義より明らかである．

$$\begin{aligned}
\text{後者の左辺} &= \partial\{(\alpha a_1,\ \alpha a_2, \cdots,\ \alpha a_n, \cdots)\} \\
&= (\alpha a_2,\ \alpha a_3, \cdots,\ \alpha a_{n+1}, \cdots) \quad \text{であり，} \\
\text{右辺} &= \alpha (a_2, a_3, \cdots, a_{n+1}, \cdots)
\end{aligned}$$

である．両者が等しいことはスカラー倍の定義より明らかである．

3. 基底の定義を確かめればよい．条件は二つある．
まず，Vから任意の元$(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$を取ってくる．
このとき，$(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) = se_1 + te_2$となる$s, t$が存在することをいえばよい．
第 1 項と第 2 項を比べれば，$s = x_1$, $t = x_2$であることがわかる．第 3 項以下が一致することは次のようにすればわかる．第 3 項が一致することは，$x_3 = s?_1 + t?_2$を確かめればよい．右辺において，$?_1 = 5 \cdot 0 - 6 \cdot 1 = -6$, $?_2 = +5 \cdot 1 - 6 \cdot 0 = 5$が漸化式よりわかるので，右辺 $= -6s + 5t$となる．左辺も漸化式より，$x_3 = 5x_2 - 6x_1$となる．s, tの値から両者が一致することがわかる．次に第$n+1$項目まで一致しているとして，第$n+2$項目が一致することを示す．これがいえれば数学的帰納法よりすべての項が一致することになる．$e_1 = (1, 0, \cdots, c_n, \cdots)$，$e_2 = (0, 1, \cdots, d_n, \cdots)$と置いておく．帰納法の仮定より，$x_n = sc_n + td_n$, $x_{n+1} = sc_{n+1} + td_{n+1}$がいえている．漸化式より，$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$であり，$c_{n+2} = 5c_{n+1} - 6c_n$, $d_{n+2} = 5d_{n+1} - 6d_n$である．したがって

$$\begin{aligned}
x_{n+2} &= 5(sc_{n+1} + td_{n+1}) - 6(sc_n + td_n) \\
&= s(5c_{n+1} - 6c_n) + t(5d_{n+1} - 6d_n) = sc_{n+2} + td_{n+2}
\end{aligned}$$

となるので，第$n+2$項目も一致することがわかった．
もう一つの条件は，$se_1 + te_2 = (0, 0, \cdots, 0, \cdots)$を満たす$s, t$が 0 であることである．それは，第 1 項と第 2 項を比較すればすぐにわかる．

4. e_1, e_2 が ∂ で写った先を e_1, e_2 で表せばよい．

$$\partial(e_1) = (0, ?_1, \cdots) = (0, -6, \cdots) = 0 \cdot e_1 + (-6) \cdot e_2$$
$$\partial(e_2) = (1, ?_2, \cdots) = (1, 5, \cdots) = 1 \cdot e_1 + 5 \cdot e_2$$

となる（最右辺の e_1, e_2 の係数は 1 項目と 2 項目を比較すればわかる）．したがって，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \text{ となる．}$$

5. A の固有多項式は

$$\left\| \begin{pmatrix} t & -1 \\ 6 & t-5 \end{pmatrix} \right\| = t(t-5) - (-1) \cdot 6 = t^2 - 5t + 6 = (t-2)(t-3)$$

となる．固有値は $(t-2)(t-3) = 0$ の解なので，$\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$ となる．

6. 固有ベクトルであるということは，$\partial\{(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)\} = \alpha(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ を満たしている．この式は $(a_2, a_3, \cdots, a_{n+1}, \cdots) = \alpha(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ となるので，第 n 項を比較すれば $a_{n+1} = \alpha a_n$ となる．これは，この数列が公比 α の等比数列になることを示している．

7. V は二次元であり，固有値が相異なるので，それぞれの固有ベクトルが V の基底になっている．それらは $(1, 2, 2^2, \cdots, 2^{n-1}, \cdots)$ と $(1, 3, 3^2, \cdots, 3^{n-1}, \cdots)$ である．
したがって V の各元は，$x(1, 2, 2^2, \cdots, 2^{n-1}, \cdots) + y(1, 3, 3^2, \cdots, 3^{n-1}, \cdots)$ と書ける．
とくに，第 n 項は $2^{n-1}x + 3^{n-1}y$ となる．

8. 前問より，第 n 項がわかったので，第 1 項と第 2 項を表して条件と比較すれば，

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$$

となる．この方程式を解けば，$x = 2$, $y = 3$ がわかる．したがって一般項は，

$$a_n = 2 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 3^{n-1} = 2^n + 3^n$$　となる.

【問 2】 $(Ax, y) = {}^t(Ax)y = {}^t x {}^t A y = (x, {}^t A y)$

ここで，一つ目の変形は内積の定義から，二つ目の変形は転置行列の性質から，最後の変形は内積の定義からでる.

【問 3】 $(Ax, y) = {}^t(Ax)\overline{y} = {}^t x {}^t A \overline{y} = {}^t x \overline{({}^t \overline{A} y)} = (x, {}^t \overline{A} y)$

ここで，一つ目の変形は Hermite 積の定義から，二つ目の変形は転置行列の性質から，三つ目の変形は複素共役の性質から，最後の変形は Hermite 積の定義からでる.

【問 4】 問 2 より，$(Av_\alpha, v_\beta) = (v_\alpha, {}^t A v_\beta)$ であり，A が対称行列であることから $(Av_\alpha, v_\beta) = (v_\alpha, Av_\beta)$ となる．v_α，v_βがそれぞれ固有ベクトルであることから，$(\alpha v_\alpha, v_\beta) = (v_\alpha, \beta v_\beta)$ となり，内積の性質より $\alpha(v_\alpha, v_\beta) = \beta(v_\alpha, v_\beta)$となる.

仮定より $\alpha \neq \beta$ なので，$(v_\alpha, v_\beta) = 0$ となる.

（実はこの問題で，固有値 α，β は実数であるように仮定してあるが，問 6 でそれが事実であることが判明する．複素共役を取っても，対称行列は成分が実数なので変化せず，エルミート行列であるから問 6 が使えるわけである.）

【問 5】 (1) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有多項式を計算する.

$$\left| \begin{pmatrix} t-4 & 0 & -2 \\ 0 & t-3 & 0 \\ -2 & 0 & t-1 \end{pmatrix} \right| = \{(t-4)(t-3)(t-1) + 0 \cdot 0 \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 \cdot 0\}$$

$$- \{(-2) \cdot (t-3) \cdot (-2) + 0 \cdot 0 \cdot (t-1) + 0 \cdot 0 \cdot (t-4)\}$$

$$= t^3 - 8t^2 + 19t - 12 - (4t - 12) = t^3 - 8t^2 + 15t$$

$$= t(t^2 - 8t + 15) = t(t-3)(t-5)$$

となるので，$t(t-3)(t-5) = 0$ を解けば，固有値が 0, 3, 5 となることがわかる．次に固有ベクトルを求める．次の連立一次方程式を解けばよい.

$$\begin{cases} 4x + 2z = \alpha x \\ 3y = \alpha y \\ 2x + z = \alpha z \end{cases}$$

$\alpha = 0$ の場合は，$v_0 = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ -2s \end{pmatrix}$ となる．

$\alpha = 3$ の場合は，$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ となる．

$\alpha = 5$ の場合は，$v_5 = \begin{pmatrix} 2u \\ 0 \\ u \end{pmatrix}$ となる．

（このまま並べて $P = \begin{pmatrix} s & 0 & 2u \\ 0 & t & 0 \\ -2s & 0 & u \end{pmatrix}$ としても対角化はできるが，P は直交行列にはならない．）

各ベクトルの長さを 1 にするためには，$s = u = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$t = 1$ となる．

こうして $P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{-2}{\sqrt{5}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ とすれば，P は直交行列になる．

（各固有ベクトルが互いに直交することは問 4 からわかるので，長さを 1 にすれば直交行列になる．P と ${}^tP$ をかければ，その成分がこれらのベクトルの内積になることに気がつけば，このことはわかる．直交行列 P の場合は P の逆行列が ${}^tP$ になるので，計算する必要がない．）

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有多項式を計算する．

$$\left| \begin{pmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ -1 & t-1 & -1 \\ -1 & -1 & t-1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \{(t-1)(t-1)(t-1) + (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\}$$

$$- \{(-1)\cdot(t-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1)\cdot(t-1) + (t-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\}$$

$$= t^3 - 3t^2 + 3t - 1 - 1 - 1 - 3(t-1) = t^3 - 3t^2 = t^2(t-3)$$

となるので，$t^2(t-3) = 0$ を解けば，固有値が 0, 3 となることがわかる．次に固有ベクトルを求める．次の連立一次方程式を解けばよい．

$$\begin{cases} x+y+z=\alpha x \\ x+y+z=\alpha y \\ x+y+z=\alpha z \end{cases}$$

$\alpha = 0$ の場合は，$v_0 = \begin{pmatrix} s \\ t \\ -s-t \end{pmatrix}$ となる．

$\alpha = 3$ の場合は，$v_3 = \begin{pmatrix} u \\ u \\ u \end{pmatrix}$ となる．

$\alpha = 0$ の場合は，二重解なので，二つの一次独立な固有ベクトルを取ってこなくては対角化ができない．さらに P が直交行列であることを求められているので，直交するように取らなくてはならない(実は，直交するベクトルは一次独立である)．

$s=1, t=0$ としたベクトル $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ と，

$s=0, t=1$ としたベクトル $v_0{}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を取れば，

一次独立ではあるが，直交はしない．

$v_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ と取り直せば，最初のベクトルは長さが 1 になる．

次のベクトルを

$$v_0{}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

とすれば，最初のベクトルと直交するようになる（上段の式の第 2 項は $v_0{}'$を v_0 の方向に射影したものである．それを引き去ることによって，直交するようにした）．

次に，長さでわってやることによって長さを 1 にする．

したがって，$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ となる．

（この一連の操作を Schmidt の直交化法という．）

v_3 も長さを 1 にするため，$v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ となる．

こうして，$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ とすればよい．

【問 6】　(1)（Av_α，v_α）＝（v_α，${}^t\overline{A}v_\alpha$）＝（v_α，Av_α）

ここで，一つ目の変形は問 3 から，二つ目の変形は A が Hermite 行列であるという定義そのものである．v_αが A の固有ベクトルであるということから（αv_α，v_α）＝（v_α，αv_α）となり，Hermite 積の性質から α（v_α，v_α）＝ $\overline{\alpha}$（v_α，v_α）となる．（v_α，v_α）$\neq 0$ より，$\alpha = \overline{\alpha}$となる．これは α が実数であることを示している．

(2)（1）と同様に（Av_α，v_β）＝（v_α，Av_β）となり，v_α，v_βが A の固

有ベクトルであるということから，$(\alpha v_\alpha,\ v_\beta) = (v_\alpha,\ \beta v_\beta)$ となり，$\alpha(v_\alpha,\ v_\beta) = \overline{\beta}(v_\alpha,\ v_\beta) = \beta(v_\alpha,\ v_\beta)$ となる．最後のところで(1)の結果を使っている．仮定より $\alpha \neq \beta$ なので，$(v_\alpha,\ v_\beta) = 0$ となる．

【問 7】 $\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$ の固有多項式を求める．

$$\left|\begin{pmatrix} t-2 & -(1+i) \\ -(1-i) & t-1 \end{pmatrix}\right| = (t-2)(t-1) - (1+i)(1-i)$$
$$= t^2 - 3t + 2 - 2 = t^2 - 3t = t(t-3)$$

となり，固有値は $t(t-3) = 0$ の解なので 0 と 3 である．
固有ベクトルは，次の連立一次方程式を解けば得られる．

$$\begin{cases} 2x + (1+i)y = \alpha x \\ (1-i)x + y = \alpha y \end{cases}$$

$\alpha = 0$ の場合は，$v_0 = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix}$ となるので，長さを 1 にすると，

$v_0 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ となる．

$\alpha = 3$ の場合は，$v_3 = s\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$ となるので，長さを 1 にすると，

$v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ となる．

この二つのベクトルの Hermite 積が 0 になることは問 6 からわかり，直交行列の場合と同じ理由で，$U = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ とすれば対角化ができる．しかも，U がユニタリ行列になるので，U の逆行列が ${}^t\overline{U}$ になる．

第５章　章末問題の解答

【問１】　題意より，紫外線強度を L_0，分解反応の速度定数を μ とすると，物質 A の分解速度は

$$-\frac{\mathrm{d}[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t} = \mu L_0[\mathrm{A}]$$

となる．これは変数分離型微分方程式であり，物質 A の初期濃度を $[\mathrm{A}]_0$ とすると，

$$\ln\frac{[\mathrm{A}]}{[\mathrm{A}]_0} = -\mu L_0 t$$

を得る．求める方程式は上の式でもよいが，

$$[\mathrm{A}] = [\mathrm{A}]_0 e^{-\mu L_0 t}$$

とすると見通しがよくなる．

【問２】　問 1 で立てた速度式に紫外線強度の変動項をかければよく，

$$-\frac{\mathrm{d}[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t} = \mu L_0(1 + k\sin\omega t)[\mathrm{A}]$$

これも変数分離型であり，解き方は 1 と同じである．1 と同様に物質 A の初期濃度を $[\mathrm{A}]_0$ とすると，

$$\begin{aligned}\ln\frac{[\mathrm{A}]}{[\mathrm{A}]_0} &= -\mu L_0 t + \frac{\mu L_0 k}{\omega}\cos\omega t - \frac{\mu L_0 k}{\omega}\\ &= -\mu L_0 t + \frac{\mu L_0 k}{\omega}(\cos\omega t - 1)\end{aligned}$$

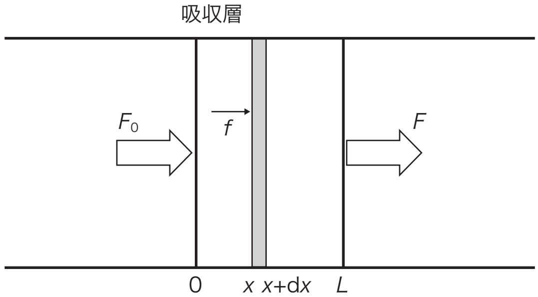
を得る．

この問題の場合，1 のように指数形にするとややこしい式になるのでこのかたちがよい．

【問３】　図に示したように厚さ $\mathrm{d}x$ の層を考える．

この層に入る汚染物質の濃度を f とすると，吸着の様子は

$$-\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \mu f$$



となる．これは，これまで多くの例で説明してきた変数分離型微分方程式であり，これを解くと，

$$\ln \frac{F}{F_0} = -\mu L$$

となる．ここで，F が F_0 の 10%となる層の厚さを求める．

$F = \dfrac{F_0}{10}$ を上の式に代入して，

$$\ln \frac{F}{F_0} = \quad \ln \frac{F_0}{10F_0} = -\mu L$$

となり，

$\ln \dfrac{1}{10} = -\mu L$，すなわち $\ln 10 = \mu L$．ここで $\ln 10 = \dfrac{\log 10}{\log e} =$

$1 \times \dfrac{1}{\log e} = 2.303$ より　$2.303 \log 10 = \mu L$

$$\therefore L = \frac{2.303}{\mu}$$

を得る（ここで底の変換公式 $\ln 10 = \dfrac{\log 10}{\log e}$ と，$e = 2.718$, $\log e = 0.434$ という近似を使った）．

【問 4】 問題の式も変数分離型微分方程式であり，これまでと同じようにして解けばよい．

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = (k\cos \omega_1 t + k\sin^2 \omega_2 t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \left\{k\cos \omega_1 t + \frac{k}{2}(1 - \cos 2\omega_2 t)\right\}\mathrm{d}t$$

$$\int_{f_0}^{f} \frac{\mathrm{d}f}{f} = \int_0^t \left\{ k\cos\,\omega_1 t + \frac{k}{2}(1 - \cos 2\omega_2 t) \right\} \mathrm{d}t$$

$$\ln \frac{f}{f_0} = \frac{k}{2}t + \frac{k}{\omega_1}\sin\omega_1 t - \frac{k}{4\omega_2}\sin 2\omega_2 t$$

となる．

【問 5】 この問題の解き方は第 3 章の本文では説明できていないが，非常に大切なのでここで説明しておく．まず，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + y \quad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + y \quad \cdots\cdots ②$$

として①を変形し，

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$y = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x$$

とする．ここに②を代入して整理すると，

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x$$

$$= 2\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2x = 0$$

一般に，$a\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + b\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + c = 0$ のかたちの微分方程式の解は，第 4 章 4.9 項で解説したように，

$$au^2 + bu + c = 0$$

という二次方程式の解を α，β としたとき，$x = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}$ となる．x は実数値関数なので，固有値が実数(1)か否か(2)で分けると，

(1) α，β が実数なら，$x = ve^{\alpha t} + we^{\beta t}$　(v, w は定数)

(2) α，β が $m \pm ni$ という複素数なら，

$$x = ve^{mt}\cos nt + we^{mt}\sin nt \quad (v, w\text{ は定数})$$

となる．(2) においてオイラーの公式を $e^{(m\pm ni)t} = e^{mt}(\cos nt \pm i\sin nt)$ として使った．(1)，(2) で定数 A, B を必要に応じて v, w に置き直している．上の式は $u^2 - 2u + 2 = 0$ となり，解は $1 \pm i$ となる．

よって，求める方程式の解は

$$x = ve^{t}\cos t + we^{t}\sin t \quad (v, w\text{ は定数})$$
$$y = we^{t}\cos t + ve^{t}\sin t$$

となる．

第 6 章　章末問題の解答

【問 1】 対応のない t–検定を用いる問題である．
本文中で説明したように，Excel の分析ツールを用いて検定すると，表 1 の結果を得る．
この結果より，両者のあいだに有意差が認められ，生産ラインの組み換えにより不良品率が低下したといえる．

【問 2】 対応のある t–検定を用いる問題である．
本文中で説明したように，Excel の分析ツールを用いて検定すると，表 2 の結果を得る．
この結果より，両者のあいだに有意差は認められず，分析法による結果の違いはないといえる．

表 1　t–検定：等分散を仮定した 2 標本による検定

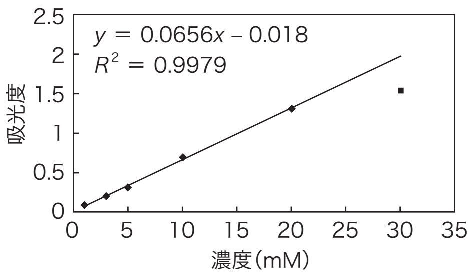
	組み換え前	組み換え後
平均	6	3.7
分散	1.333333	1.344444
観測数	10	10
プールされた分散	1.338889	
仮説平均との差異	0	
自由度	18	
t	4.444681	
$P(T \leqq t)$ 片側	0.000156	
t 境界値 片側	1.734064	
$P(T \leqq t)$ 両側	0.000313	
t 境界値 両側	2.100922	

表 2　t–検定：一対の標本による平均の検定ツール

	分析法 A	分析法 B
平均	2.47	2.57
分散	1.173444	1.540111
観測数	10	10
ピアソン相関	0.829076	
仮説平均との差異	0	
自由度	9	
t	–0.45434	
$P(T \leqq t)$ 片側	0.330173	
t 境界値 片側	1.833113	
$P(T \leqq t)$ 両側	0.660345	
t 境界値 両側	2.262157	

【問 3】 比較する 2 群それぞれの母集団の分散が等しいことが，Student の t−検定を行うための条件となる．この条件が満たされているかどうかは，本文 p.197 で説明している“等分散性の検定”を行うことで確認できる．

【問 4】 これは単回帰分析の問題である．具体的には本文で説明したように，Excel のグラフ機能を使ってグラフを作成後，近似曲線を追加することで下の図の結果を得る．
本問にあるようなデータのように，高濃度側の値が近似曲線から大きくずれる場合がある．このときは，ずれた数値を“はずれ値”として回帰分析には入れないように注意しなければならない．



【問 5】 回帰分析において，データをうまく説明できているかどうかの判定は，回帰曲線と実測値のあいだの相関係数もしくは決定係数により判断する．
問 4 の結果では決定係数（R^2）が示されている．一般に，決定係数が 0.8 以上なら回帰が良好であるとされ，問 4 は 0.998 であることから良好な結果であるといえる．